

MAI 3 - domácí úkol ze cvičení 9

Promyslete (třeba jako přípravu na další cvičení) a zkuste aspoň tři z příkladů „sepsat“:

1. Najděte obor konvergence řady funkcí a vyšetřete, zda v oboru konvergence řada konverguje stejnoměrně nebo aspoň lokálně stejnoměrně:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^4 + n^2} ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{x}}{n^4 + x^2} ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1 + n^4 x^2} ;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-kx} ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x}{x^2 + n^3}\right) ;$$

$$\text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right) ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1 + x^2)^n} .$$

2. Rozhodněte, zda součty řad z příkladů 1. a 2. jsou v oboru konvergence příslušné řady funkce spojité.

3. Vypočítejte

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n n^x} ; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} x^n (1 - x) .$$

4. Určete obor, kde má derivaci funkce f (a tuto derivaci vyjádřete), je-li

$$\text{a) } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3} \quad \text{nebo} \quad \text{b) } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{x^2 + n^2} .$$

5. Pokuste se sečíst řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 3^n}$.

Návod: použijte vhodnou mocninnou řadu a vlastnosti mocninných řad (minulá přednáška 9.).